Quanten Nr. 5

Matthias Lütgens

12. Dezember 2005

Streutheorie

Der differentielle Streuquerschnitt ergibt sich aus

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{j_{aus}}{j_{ein}} r^2$$

wobei j_{ein} der einfallende Teilchenstrom $\frac{d^2N'}{dAdt}$ (Teilchenanzahl pro Fläche und Zeit), $j_{aus} = \frac{d^2N}{d\Omega dt}$ der detektierte Teilchenstrom ist (Teilchenanzahl im Raumwinkelelement $d\Omega$ und der Zeit dt) der Faktor r^2 ergibt sich aus Normierungsgründen, da so der differentielle Wirkungsquerschnitt unabhängig vom Detektorabstand wird. Mit $A = \pi b^2$ und damit $dA = 2\pi b db$ und $d\Omega = 2\pi \sin\vartheta d\vartheta$ ergibt sich unter der Annahme der Teilchenerhaltung $d^2N = d^2N'$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\frac{d^2N'}{r^2 d\Omega dt}}{\frac{d^2N}{dAdt}} r^2 = \frac{dA}{d\Omega} = \frac{2\pi b db}{2\pi \sin\vartheta d\vartheta} = \frac{b}{\sin\vartheta}\left|\frac{db}{d\vartheta}\right|$$

b ist dabei der Streuparameter und ϑ der Streuwinkel.

Streuquerschnitt einer harten Kugel mit dem Radius R

Es muss nun eine Beziehung hergestellt werden zwischen den Streuparamter b und dem Streuwinkel ϑ. Es gilt aus geometrischen Überlegungen

$$\vartheta = \pi - 2\alpha$$

und

$$\sin\alpha = \frac{b}{R}$$

Damit ergibt sich $b = b(\vartheta)$

$$b(\vartheta) = R\sin\left(\frac{\pi-\vartheta}{2}\right)$$

Die Ableitung ergibt sich zu

$$\frac{db}{d\vartheta} = -\frac{R}{2}\cos\left(\frac{\pi-\vartheta}{2}\right)$$

und der differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R\sin\left(\frac{\pi-\vartheta}{2}\right)}{\sin(\vartheta)}\frac{R}{2}\cos\left(\frac{\pi-\vartheta}{2}\right)$$

$$= \frac{R^2}{2}\frac{\sin(\pi/2)\cos(\vartheta/2) - \cos(\pi/2)\sin(\vartheta/2)}{\sin\vartheta}\cos(\pi/2)\sin(\vartheta/2) + \sin(\pi/2)\sin(\vartheta/2)$$

$$= \frac{R^2}{2}\frac{\cos(\vartheta/2)\sin(\vartheta/2)}{\sin\vartheta} = \frac{R^2}{2}\frac{\sin(\vartheta)}{2\sin(\vartheta)} = \frac{R^2}{4}.$$

Der totale Wirkungsquerschnitt ergibt sich aus der Integration über den Raumwinkel $d\Omega$

$$\sigma = \frac{R^2}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta = \pi R^2.$$

Streuquerschnitt im Coulombpotential

Ein geladenes Teilchen im Coulombpotential hat folgende Energie

$$E = E_{\text{kin}} + E_{pot} = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + \frac{\alpha}{r}$$

wobei das Teilchen anfänglich nur die kinetische Energie besitzt (unendlich weit weg vom Streuzentrum)

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

Durch Koordinatentransformation in ebene Polarkoordinaten ($\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$) ergibt sich

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 + \frac{\alpha}{r}$$

Der Drehimpuls lässt sich schreiben

$$L = mr^2\dot{\varphi} = mvb$$

Damit ergibt sich die Energie

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r} \Rightarrow \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}\right)}$$

Die Wurzel darf nicht negativ werden. Daraus ergibt sich ein Bedingung für r_{min}.

$$\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}\right) = 0 \Rightarrow r^2 - \frac{\alpha}{E}r - \frac{L^2}{2mE} = 0$$

$$r_{min} = \frac{\alpha}{2E} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4E^2} + \frac{L^2}{2mE}} = \frac{\alpha}{mv^2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{m^2v^4} + \frac{m^2b^2v^2}{2m^2v^v}} = \frac{\alpha}{mv^2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{m^2v^4} + \frac{b^2}{2}}$$

Die negative Lösung entfällt:

$$r_{min} = \frac{\alpha}{mv^2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{m^2v^4} + \frac{b^2}{2}}$$

Es ergibt sich durch Seperation

$$dr = dt\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}\right)}$$

dt lässt sich durch den Drehimpuls ausdrücken

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2} \rightarrow dt = \left(\frac{L}{mr^2}\right)^{-1} d\varphi$$

$$\int_{r_{min}}^{\infty} \frac{Ldr}{mr^2\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}\right)}} = \int_0^{\varphi} d\varphi = \varphi$$

$$\varphi = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{mbvdr}{mr^2\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{m}{2}v^2 - \frac{(mbv)^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}\right)}} = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{bdr}{r^2\sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2\alpha}{v^2mr}\right)}}$$

Nun führe ich eine Variablentransformation durch

$$x = \frac{b}{r}, \qquad \frac{dx}{dr} = -\frac{b}{r^2}, \qquad x(r_{min}) = x_0, \qquad x(\infty) = 0$$

geneuer

$$x_0 = \frac{b}{\frac{\alpha}{mv^2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{m^2v^4} + \frac{b^2}{2}}}.$$

Weiterhin ergibt sich

$$\varphi = \int_{x_0}^{0} \frac{-dx}{\sqrt{(1 - x^2 - x\frac{2\alpha}{v^2 mb})}} = \int_{0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2 - x\frac{2\alpha}{v^2 mb})}} = \int_{0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{(1 - ax - x^2)}}$$

$$x_0 = -\frac{a}{2} + \sqrt{(a^2/4) + 1}$$

mit $a = 2\alpha/mbv^2$.

Substitution $y := x + \frac{1}{2}a,\ dy = dx,\qquad y_0(x_0) = \sqrt{(a^2/4) + 1} = C,\qquad y_0(0) = \frac{a}{2} = \sqrt{C^2 - 1}$ wobei C wie noch folgt definiert wird

$$\varphi = \int_{0}^{x_0} \frac{dy}{1 - a(y - \frac{1}{2}a) - (y - \frac{1}{2}a)^2} = \int_{0}^{x_0} \frac{dy}{1 - ay + \frac{1}{2}a^2 - y^2 + ya - \frac{1}{4}a^2}$$

$$= \int_{\sqrt{C^2-1}}^{C} \frac{dy}{1 + (a/2)^2 - y^2} = \int_{\sqrt{C^2-1}}^{C} \frac{dy}{C^2 - y^2} = \left[\arcsin\left(\frac{y}{C}\right)\right]_{\sqrt{C^2-1}}^{C}$$

mit $C^2 = 1 + (a/2)^2$.

$$= \arcsin 1 - \arcsin\left(\frac{\sqrt{C^2 - 1}}{C}\right) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{\sqrt{C^2 - 1}}{C}\right) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{a/2}{\sqrt{1 + (a/2)^2}}\right)$$

$$\sin(90^\circ - \varphi) = \cos(\varphi) = \left(\frac{a/2}{\sqrt{1 + (a/2)^2}}\right) \Rightarrow \cos^2(\varphi) = \frac{a^2/4}{1 + a^2/4}$$

$$\frac{1}{\cos^2(\varphi)} = 1 + \frac{4}{a^2} = 1 + \frac{4m^2b^2v^4}{4\alpha^2} = 1 + \frac{m^2b^2v^4}{\alpha^2}$$

Der Streuwinkel hängt mit den Winkel φ zusammen über

$$\vartheta = \pi - 2\varphi$$

(analog wie bei der harten Kugel der Winkel α). Damit ergibt sich

$$\frac{1}{\cos^2(\varphi)} = 1 + \tan^2(\varphi) = 1 + \frac{m^2b^2v^4}{\alpha^2} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{mbv^2}{\alpha}\right)$$

$$\vartheta = \pi - 2\arctan\left(\frac{mbv^2}{\alpha}\right) \Rightarrow b = \frac{\alpha}{mv^2}\tan\left(\frac{\pi - \vartheta}{2}\right) = \frac{\alpha}{mv^2}\cot\left(\frac{\vartheta}{2}\right).$$

Damit kann die Ableitung

$$\frac{db}{d\vartheta} = \frac{\alpha}{2mv^2}(-\cot^2(\frac{\vartheta}{2}) - 1) = -\frac{\alpha}{2mv^2}(\cot^2(\frac{\vartheta}{2}) + 1) = -\frac{\alpha}{2mv^2}\frac{1}{\sin^2(\vartheta/2)}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin(\vartheta)}\left|\frac{db}{d\vartheta}\right| = \frac{b}{\sin(\vartheta)}\frac{\alpha}{2mv^2}\frac{1}{\sin^2(\vartheta/2)} = \frac{\alpha b}{2mv^2}\frac{1}{\sin(\vartheta)\sin^2(\vartheta/2)} = \frac{\alpha b}{4E}\frac{1}{\sin(\vartheta)\sin^2(\vartheta/2)}$$

$$= \frac{\alpha^2}{4E}\frac{1}{2E}\frac{\cot\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\sin(\vartheta)\sin^2(\vartheta/2)} = \frac{\alpha^2}{4E}\frac{1}{2E}\frac{\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\sin(\vartheta)\sin^3(\vartheta/2)} = \frac{\alpha^2}{4E}\frac{1}{2E}\frac{\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{2\sin(\vartheta/2)\cos(\vartheta/2)\sin^3(\vartheta/2)}$$

$$= \frac{\alpha^2}{16E^2}\frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)} = \left(\frac{\alpha}{4E}\right)^2\frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)}$$

Setzt man nun für das Coulombpotential

$$\alpha = \pm\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0} \qquad \text{(Abstossung / Anziehung)}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{1}{16E^2} \frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)}$$

Der totale Streuquerschnitt berechnet sich durch Integration über alle Raumwinkelelemente

$$\sigma = \left(\frac{\alpha}{4E}\right)^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin(\vartheta) \frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)} d\vartheta = \left[-\frac{2}{\sin^2(\vartheta/2)}\right]_0^{\pi} = \infty$$

Demnach spürt jede Ladung eine Ablenkung?!