Halbleitertheorie
Übung 1

Chris Bünger

31. Oktober 2006

1. Aufgabe

Beweis. Zu zeigen: Eigenschaften der δ-Funktion erfüllt:

- Untersuchung der Funktion an der Stelle ω_0:

$$\begin{aligned}
\lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\gamma}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2}\bigg|_{\omega_0} &= \lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{1}{\gamma}\\
&= \infty\\
&= \delta(\omega-\omega_0)\big|_{\omega_0}\\
&= \delta(0)
\end{aligned}$$

- Untersuchung der Funktion $\forall\omega\in\mathbb{R}\backslash\{\omega_0\}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\gamma}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2} &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2}\lim_{\gamma\to 0}\gamma\\
&= 0 && \forall\omega\neq\omega_0\\
&= \delta(\omega-\omega_0) && \forall\omega\neq\omega_0
\end{aligned}$$

- Integration über reelle Achse:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\gamma}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2} &= \lim_{\gamma\to 0}\frac{\gamma}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\frac{1}{\omega^2-2\omega\omega_0+\omega_0^2+\gamma^2}\\
&= \lim_{\gamma\to 0}\frac{\gamma}{\pi}\frac{1}{\gamma}\left[\arctan\left(\frac{\omega-\omega_0}{\gamma}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty}\\
&= \lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{\pi}\left[\arctan\left(\frac{\omega-\omega_0}{\gamma}\right)\bigg|_{+\infty}-\arctan\left(\frac{\omega-\omega_0}{\gamma}\right)\bigg|_{-\infty}\right]\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\underbrace{\lim_{\gamma\to 0}\arctan\left(\frac{\omega-\omega_0}{\gamma}\right)\bigg|_{+\infty}}_{+\pi/2}-\underbrace{\lim_{\gamma\to 0}\arctan\left(\frac{\omega-\omega_0}{\gamma}\right)\bigg|_{-\infty}}_{-\pi/2}\right]\\
&= 1\\
&\overset{\text{Def.}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0)\,\mathrm{d}\omega
\end{aligned}$$

□

2. Aufgabe

3. Aufgabe

$$\mathcal{F}\left(\Theta(\omega)\right) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega \frac{i}{\omega + i\varepsilon} e^{-i\omega t}$$

- Singularität in der unteren Halbebene bei $\omega = -i\varepsilon$
- Integration in der komplexen Ebene, Weg entlang der reellen Achse $\mathcal{C}_\mathrm{R}$, schließen des Integrationsweges über Halbkreis $\mathcal{C}_\mathrm{H}$:

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z \frac{i}{z + i\varepsilon} e^{-izt} = \int\limits_{\mathcal{C}_\mathrm{R}} \mathrm{d}z \frac{i}{z + i\varepsilon} e^{-izt} - \int\limits_{\mathcal{C}_\mathrm{H}} \mathrm{d}z \frac{i}{z + i\varepsilon} e^{-izt}$$

- Integration über den Halbkreis $\mathcal{C}_\mathrm{H}$ liefert für $R \to \infty$ keinen Beitrag zum Integral:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z \frac{i}{z + i\varepsilon} e^{-izt} &= \int\limits_{\mathcal{C}_\mathrm{R}} \mathrm{d}z \frac{i}{z + i\varepsilon} e^{-izt} \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z \frac{i}{z + i\varepsilon} e^{-izt} \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega \frac{i}{\omega + i\varepsilon} e^{-i\omega t}
\end{aligned}$$

- Auswertung in oberer Halbebene ($t < 0$), keine Pole:

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z \frac{i}{z + i\varepsilon} e^{-izt} = 0$$

- untere Halbebene ($t > 0$), Integration im Uhrzeigersinn:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z \frac{i}{z + i\varepsilon} e^{-izt} &= -2\pi i \mathrm{Res}_{-i\varepsilon}\left(\frac{i}{z + i\varepsilon} e^{-izt}\right) \\
&= -2\pi i \lim_{z \to -i\varepsilon} \frac{i}{z + i\varepsilon} e^{-izt}(z + i\varepsilon) \\
&= 2\pi e^{-\varepsilon t}
\end{aligned}$$

- mit $\varepsilon \to 0^+$ folgt:

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & : \quad t > 0 \\ 0 & : \quad t < 0 \end{cases}$$

4. Aufgabe

- Fouriertransformation der rechten Seite:

$$2\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \delta(t) e^{-i\omega t} = 2\pi$$

- Rücktransformation

$$2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega \frac{1}{2\pi} e^{i\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega e^{i\omega t}$$