Spezielle Relativitätstheorie

mathematische Beschreibung

Daniel Schick

Universität Rostock

9. Juni 2006

Überblick

Hermann Minkowski (*1864 - †1909)

„Von Stund an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren.“

Überblick

Basis

- Definition einer vierdimensionalen **Raumzeit**:

$$\text{Zeitkoordniate:} \quad ct \qquad \text{Raumkoordinaten:} \quad x,\ y,\ z$$

- Beschreibung durch Vektoren in einem Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$ mit der Basis

$$\{e_\mu\}\ , \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

Basis

- Definition einer vierdimensionalen **Raumzeit**:

$$\text{Zeitkoordniate:} \quad ct \qquad \text{Raumkoordinaten:} \quad x,\ y,\ z$$

- Beschreibung durch Vektoren in einem Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$ mit der Basis

$$\{e_\mu\}\,, \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

- Darstellung eines Vektors $x \in V$ mit

$$x = \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu e_\mu \equiv x^\mu e_\mu, \qquad x^\mu \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Basis

- Definition einer vierdimensionalen **Raumzeit**:

$$\text{Zeitkoordniate:} \quad ct \qquad \text{Raumkoordinaten:} \quad x,\ y,\ z$$

- Beschreibung durch Vektoren in einem Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$ mit der Basis

$$\{e_\mu\}\,, \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

- Darstellung eines Vektors $x \in V$ mit

$$x = \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu e_\mu \equiv x^\mu e_\mu, \qquad x^\mu \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

- EINSTEINsche Summenkonvention wird ab jetzt benutzt

Basis

- Definition einer vierdimensionalen **Raumzeit**:

$$\text{Zeitkoordniate:} \quad ct \qquad \text{Raumkoordinaten:} \quad x, \; y, \; z$$

- Beschreibung durch Vektoren in einem Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$ mit der Basis

$$\{e_\mu\}\,, \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

- Darstellung eines Vektors $x \in V$ mit

$$x = \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu e_\mu \equiv x^\mu e_\mu, \qquad x^\mu \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

- EINSTEINsche Summenkonvention wird ab jetzt benutzt

Lorentz-Skalarprodukt I

- Definition eines speziellen Skalarproduktes in diesem Vektorraum als bilineare Abbildung

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \mapsto \mathbb{R}$$

LORENTZ-Skalarprodukt I

- Definition eines speziellen Skalarproduktes in diesem Vektorraum als bilineare Abbildung

$$(\cdot,\cdot) : V \times V \mapsto \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} (x,y) &= x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3, \qquad x,y \in V \\ &= \sum_{\mu=0}^{3} \eta_\mu x^\mu y^\mu = g_{\mu\nu}\, x^\mu y^\nu \end{aligned} \tag{2}$$

- mit $\eta_0 = 1, \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = -1$

LORENTZ-Skalarprodukt I

- Definition eines speziellen Skalarproduktes in diesem Vektorraum als bilineare Abbildung
$$(\cdot,\cdot) : V \times V \mapsto \mathbb{R}$$
$$\begin{aligned}(x,y) &= x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3, \qquad x,y \in V \\ &= \sum_{\mu=0}^{3} \eta_\mu x^\mu y^\mu = g_{\mu\nu}\, x^\mu y^\nu\end{aligned} \tag{2}$$
- mit $\eta_0 = 1, \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = -1$
- andere Schreibweisen sind
$$x \cdot y \equiv (x,y) \equiv g(x,y)$$

LORENTZ-Skalarprodukt I

- Definition eines speziellen Skalarproduktes in diesem Vektorraum als bilineare Abbildung

$$(\cdot,\cdot) : V \times V \mapsto \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} (x,y) &= x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3, \qquad x,y \in V \\ &= \sum_{\mu=0}^{3} \eta_\mu x^\mu y^\mu = g_{\mu\nu}\, x^\mu y^\nu \end{aligned} \tag{2}$$

- mit $\eta_0 = 1, \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = -1$
- andere Schreibweisen sind

$$x \cdot y \equiv (x,y) \equiv g(x,y)$$

LORENTZ-Metrik

- Matrix $g_{\mu\nu}$ definiert die LORENTZ-Metrik
- In der kanonischen Basis gilt

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$$

LORENTZ-Metrik

- Matrix $g_{\mu\nu}$ definiert die LORENTZ-Metrik
- In der kanonischen Basis gilt

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$$

- $g_{\mu\nu}$ ist diagonal, was in gekrümmten Räumen nicht mehr der Fall sein muss

LORENTZ-Metrik

- Matrix $g_{\mu\nu}$ definiert die LORENTZ-Metrik
- In der kanonischen Basis gilt

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$$

- $g_{\mu\nu}$ ist diagonal, was in gekrümmten Räumen nicht mehr der Fall sein muss
- Metrik ist symmetrisch, nicht entartet, aber **nicht** *positiv definit*

LORENTZ-Metrik

- Matrix $g_{\mu\nu}$ definiert die LORENTZ-Metrik
- In der kanonischen Basis gilt

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$$

- $g_{\mu\nu}$ ist diagonal, was in gekrümmten Räumen nicht mehr der Fall sein muss
- Metrik ist symmetrisch, nicht entartet, aber **nicht** *positiv definit*
- Einsetzen von $x = x^\mu e_\mu$ in Skalarprodukt ergibt

$$\begin{aligned}(x, y) &= x^\mu y^\nu (e_\mu, e_\nu)\\ (e_\mu, e_\nu) &= g_{\mu\nu},\end{aligned} \qquad (3)$$

LORENTZ-Metrik

- Matrix $g_{\mu\nu}$ definiert die LORENTZ-Metrik
- In der kanonischen Basis gilt

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$$

- $g_{\mu\nu}$ ist diagonal, was in gekrümmten Räumen nicht mehr der Fall sein muss
- Metrik ist symmetrisch, nicht entartet, aber **nicht** *positiv definit*
- Einsetzen von $x = x^\mu e_\mu$ in Skalarprodukt ergibt

$$\begin{aligned}(x, y) &= x^\mu y^\nu (e_\mu, e_\nu) \\ (e_\mu, e_\nu) &= g_{\mu\nu},\end{aligned} \tag{3}$$

- die LORENTZ-Metrik bewirkt, dass die Orthogonalitätsbedingung (3) der Basis die Matrix $g_{\mu\nu}$ enthält

Lorentz-Metrik

- Matrix $g_{\mu\nu}$ definiert die Lorentz-Metrik
- In der kanonischen Basis gilt

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$$

- $g_{\mu\nu}$ ist diagonal, was in gekrümmten Räumen nicht mehr der Fall sein muss
- Metrik ist symmetrisch, nicht entartet, aber **nicht** *positiv definit*
- Einsetzen von $x = x^\mu e_\mu$ in Skalarprodukt ergibt

$$\begin{aligned}(x, y) &= x^\mu y^\nu (e_\mu, e_\nu) \\ (e_\mu, e_\nu) &= g_{\mu\nu},\end{aligned} \tag{3}$$

- die Lorentz-Metrik bewirkt, dass die Orthogonalitätsbedingung (3) der Basis die Matrix $g_{\mu\nu}$ enthält

Minkowski-Raum

Der Vektorraum V mit Lorentz-Metrik g heißt Minkowski-Raum $\mathbb{M} = (V, g)$
Er ist pseudoeuklidisch.

Zeitartigkeit

$$\mathbb{M}_- := \{v \in \mathbb{M} \mid \langle v, v \rangle < 0\}$$

Minkowski-Raum

Der Vektorraum V mit Lorentz-Metrik g heißt Minkowski-Raum $\mathbb{M} = (V, g)$
Er ist pseudoeuklidisch.

Zeitartigkeit

$$\mathbb{M}_- := \{v \in \mathbb{M} \mid \langle v, v \rangle < 0\}$$

Raumartigkeit

$$\mathbb{M}_+ := \{v \in \mathbb{M} \mid \langle v, v \rangle > 0\}$$

Minkowski-Raum

Der Vektorraum V mit Lorentz-Metrik g heißt Minkowski-Raum $\mathbb{M} = (V, g)$
Er ist pseudoeuklidisch.

Zeitartigkeit

$$\mathbb{M}_- := \{v \in \mathbb{M} \mid \langle v, v \rangle < 0\}$$

Raumartigkeit

$$\mathbb{M}_+ := \{v \in \mathbb{M} \mid \langle v, v \rangle > 0\}$$

Lichtartigkeit

$$\mathbb{M}_0 := \{v \in \mathbb{M} \setminus \{o\} \mid \langle v, v \rangle = 0\}$$

Minkowski-Raum

Der Vektorraum V mit Lorentz-Metrik g heißt Minkowski-Raum $\mathbb{M} = (V, g)$
Er ist pseudoeuklidisch.

Zeitartigkeit

$$\mathbb{M}_- := \{v \in \mathbb{M} \mid \langle v, v \rangle < 0\}$$

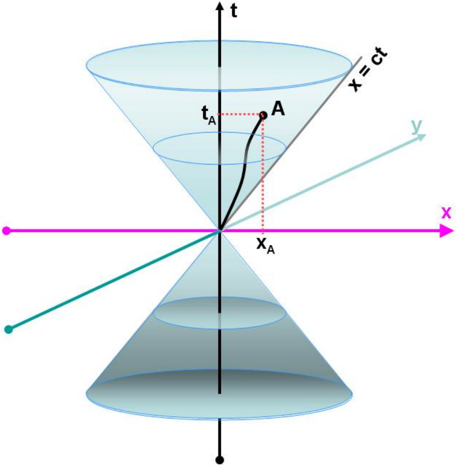
Raumartigkeit

$$\mathbb{M}_+ := \{v \in \mathbb{M} \mid \langle v, v \rangle > 0\}$$

Lichtartigkeit

$$\mathbb{M}_0 := \{v \in \mathbb{M} \setminus \{o\} \mid \langle v, v \rangle = 0\}$$

Minkowski-Raum



Dualraum

- nützlich und elegant den *Dualraum* $\tilde{V}$ einzuführen
- durch das LORENTZ-Skalarprodukt können wir eine Zuordnung definieren

$$\tilde{y}(x) = (x, y) \qquad \forall x \in V. \tag{4}$$

Dualraum

- nützlich und elegant den *Dualraum* $\tilde{V}$ einzuführen
- durch das LORENTZ-Skalarprodukt können wir eine Zuordnung definieren

$$\tilde{y}(x) = (x, y) \qquad \forall x \in V. \tag{4}$$

- so definierte Abbildung $\tilde{y} : V \mapsto \mathbb{R}$ heißt ein lineares Funktional auf V

Dualraum

- nützlich und elegant den *Dualraum* $\tilde{V}$ einzuführen
- durch das LORENTZ-Skalarprodukt können wir eine Zuordnung definieren

$$\tilde{y}(x) = (x, y) \qquad \forall x \in V. \tag{4}$$

- so definierte Abbildung $\tilde{y} : V \mapsto \mathbb{R}$ heißt ein lineares Funktional auf V
- wählen jetzt speziell anstelle von x in (4) die kanonische Basis, d.h.

$$\tilde{y}(e_\mu) = (y, e_\mu)$$

Dualraum

- nützlich und elegant den *Dualraum* $\tilde{V}$ einzuführen
- durch das LORENTZ-Skalarprodukt können wir eine Zuordnung definieren

$$\tilde{y}(x) = (x, y) \qquad \forall x \in V. \tag{4}$$

- so definierte Abbildung $\tilde{y} : V \mapsto \mathbb{R}$ heißt ein <u>lineares Funktional auf V</u>
- wählen jetzt speziell anstelle von x in (4) die kanonische Basis, d.h.

$$\tilde{y}(e_\mu) = (y, e_\mu)$$

- die Ergebnisse können wir wieder zu einem Vierervektor zusammenfassen

$$\{\tilde{y}(e_0),\ \tilde{y}(e_1),\ \tilde{y}(e_2),\ \tilde{y}(e_3)\} \in \tilde{V} \tag{5}$$

$$= \quad (y^0, -y^1, -y^2, -y^3)$$

Dualraum

- nützlich und elegant den *Dualraum* $\tilde{V}$ einzuführen
- durch das LORENTZ-Skalarprodukt können wir eine Zuordnung definieren

$$\tilde{y}(x) = (x, y) \qquad \forall x \in V. \tag{4}$$

- so definierte Abbildung $\tilde{y} : V \mapsto \mathbb{R}$ heißt ein lineares Funktional auf V
- wählen jetzt speziell anstelle von x in (4) die kanonische Basis, d.h.

$$\tilde{y}(e_\mu) = (y, e_\mu)$$

- die Ergebnisse können wir wieder zu einem Vierervektor zusammenfassen

$$\{\tilde{y}(e_0),\ \tilde{y}(e_1),\ \tilde{y}(e_2),\ \tilde{y}(e_3)\} \in \tilde{V} \tag{5}$$

$$= \quad (y^0, -y^1, -y^2, -y^3)$$

Dualraum

Die Menge aller linearen Funktionale $\tilde{y}$ ist wieder einen Vektorraum, der Dualraum $\tilde{V}$ von V

- die Elemente des Dualraums heißen Kovektoren oder kovariante Vektoren

Dualraum

Die Menge aller linearen Funktionale $\tilde{y}$ ist wieder einen Vektorraum, der Dualraum $\tilde{V}$ von V

- die Elemente des Dualraums heißen Kovektoren oder kovariante Vektoren
- die kanonische Basis $\{\varepsilon^\mu\}$ in $\tilde{V}$ ist so gewählt, dass der Kovektor genau die Koordinaten von y bzgl. dieser Basis (Kobasis) enthält

Dualraum

Die Menge aller linearen Funktionale $\tilde{y}$ ist wieder einen Vektorraum, der Dualraum $\tilde{V}$ von V

- die Elemente des Dualraums heißen Kovektoren oder kovariante Vektoren
- die kanonische Basis $\{\varepsilon^\mu\}$ in $\tilde{V}$ ist so gewählt, dass der Kovektor genau die Koordinaten von y bzgl. dieser Basis (Kobasis) enthält
- für $y = y_\mu \varepsilon^\mu$ gilt folgende Identifikation für die Koordinaten von $y \in V$ und $y \in \tilde{V}$

$$y_\mu = g_{\mu\nu} y^\nu \qquad (6)$$

Dualraum

Die Menge aller linearen Funktionale $\tilde{y}$ ist wieder einen Vektorraum, der Dualraum $\tilde{V}$ von V

- die Elemente des Dualraums heißen Kovektoren oder kovariante Vektoren
- die kanonische Basis $\{\varepsilon^\mu\}$ in $\tilde{V}$ ist so gewählt, dass der Kovektor genau die Koordinaten von y bzgl. dieser Basis (Kobasis) enthält
- für $y = y_\mu \varepsilon^\mu$ gilt folgende Identifikation für die Koordinaten von $y \in V$ und $y \in \tilde{V}$

$$y_\mu = g_{\mu\nu} y^\nu \tag{6}$$

- die Koordinaten y_μ heißen kovariant, die y^μ kontravariante

Dualraum

Die Menge aller linearen Funktionale $\tilde{y}$ ist wieder einen Vektorraum, der Dualraum $\tilde{V}$ von V

- die Elemente des Dualraums heißen Kovektoren oder kovariante Vektoren
- die kanonische Basis $\{\varepsilon^\mu\}$ in $\tilde{V}$ ist so gewählt, dass der Kovektor genau die Koordinaten von y bzgl. dieser Basis (Kobasis) enthält
- für $y = y_\mu \varepsilon^\mu$ gilt folgende Identifikation für die Koordinaten von $y \in V$ und $y \in \tilde{V}$

$$y_\mu = g_{\mu\nu} y^\nu \tag{6}$$

- die Koordinaten y_μ heißen kovariant, die y^μ kontravariante

LORENTZ-Skalarprodukt II

- wir können also das LORENTZ-Skalarprodukt auch als lineare Abbildung

$$\tilde{V} \times V \mapsto \mathbb{R}$$

  auffassen

- dabei gilt

$$\langle x, y \rangle = x_\mu y^\nu = x^\mu y_\mu = \langle y, x \rangle, \qquad x \in \tilde{V} \; y \in V \quad \text{oder} \quad x \in V \; y \in \tilde{V} \tag{7}$$

LORENTZ-Skalarprodukt II

- wir können also das LORENTZ-Skalarprodukt auch als lineare Abbildung

$$\tilde{V} \times V \mapsto \mathbb{R}$$

  auffassen
- dabei gilt

$$\langle x, y\rangle = x_\mu y^\nu = x^\mu y_\mu = \langle y, x\rangle, \qquad x \in \tilde{V}\ y \in V \quad \text{oder} \quad x \in V\ y \in \tilde{V} \tag{7}$$

- eine Form bei der $g_{\mu\nu}$ nicht mehr auftaucht

LORENTZ-Skalarprodukt II

- wir können also das LORENTZ-Skalarprodukt auch als lineare Abbildung

$$\tilde{V} \times V \mapsto \mathbb{R}$$

  auffassen
- dabei gilt

$$\langle x, y \rangle = x_\mu y^\nu = x^\mu y_\mu = \langle y, x \rangle, \qquad x \in \tilde{V}\ y \in V \quad \text{oder} \quad x \in V\ y \in \tilde{V} \tag{7}$$

- eine Form bei der $g_{\mu\nu}$ nicht mehr auftaucht

LORENTZ-Skalarprodukt II

- es gilt folgendes

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle =& x_\mu y^\nu \langle \varepsilon^\mu, e_\nu\rangle, \qquad \text{d.h. mit (7):} \\ \langle \varepsilon^\mu, e_\nu\rangle =& \delta^\mu_\nu\end{aligned} \tag{8}$$

- mit $\delta^\mu_\nu = \mathrm{diag}(1,1,1,1)$ woraus für die Koordinaten folgt

$$x^\mu = \langle \varepsilon^\mu, x\rangle \qquad x_\mu = \langle x, e_\mu\rangle \tag{9}$$

LORENTZ-Skalarprodukt II

- es gilt folgendes

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle &= x_\mu y^\nu \langle \varepsilon^\mu, e_\nu\rangle, \qquad \text{d.h. mit (7):} \\ \langle \varepsilon^\mu, e_\nu\rangle &= \delta^\mu_\nu \end{aligned} \tag{8}$$

- mit $\delta^\mu_\nu = \mathrm{diag}(1,1,1,1)$ woraus für die Koordinaten folgt

$$x^\mu = \langle \varepsilon^\mu, x\rangle \qquad x_\mu = \langle x, e_\mu\rangle \tag{9}$$

- da $y_\mu = g_{\mu\nu} y^\nu$ gilt sofort

$$\begin{aligned} (x, y) &= \langle x, y\rangle \qquad \text{bzw.} \\ g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu &= x_\nu y^\nu \end{aligned} \tag{10}$$

LORENTZ-Skalarprodukt II

- es gilt folgendes

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle =& x_\mu y^\nu \langle \varepsilon^\mu, e_\nu\rangle, \qquad \text{d.h. mit (7):} \\ \langle \varepsilon^\mu, e_\nu\rangle =& \delta^\mu_\nu \end{aligned} \tag{8}$$

- mit $\delta^\mu_\nu = \mathrm{diag}(1,1,1,1)$ woraus für die Koordinaten folgt

$$x^\mu = \langle \varepsilon^\mu, x\rangle \qquad x_\mu = \langle x, e_\mu\rangle \tag{9}$$

- da $y_\mu = g_{\mu\nu} y^\nu$ gilt sofort

$$\begin{aligned} (x, y) =& \langle x, y\rangle \qquad \text{bzw.} \\ g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu =& x_\nu y^\nu \end{aligned} \tag{10}$$

Basistranformation

- eine Basistransformation ist eine lineare Abbildung $A : V \mapsto V$, so dass

$$e'_\mu = Ae_\mu = A^\nu_\mu e_\nu \tag{11}$$

- ein Vektor x ändert sich bei einer Basistransformation nicht, wohl aber seine Koordinaten

$$x = x^\mu e_\mu = x'^\mu e'_\mu$$

Basistranformation

- eine Basistransformation ist eine lineare Abbildung $A : V \mapsto V$, so dass

$$e'_\mu = Ae_\mu = A^\nu_\mu e_\nu \tag{11}$$

- ein Vektor x ändert sich bei einer Basistransformation nicht, wohl aber seine Koordinaten

$$x = x^\mu e_\mu = x'^\mu e'_\mu$$

- für die Koordinaten eines kovarianten Vektors werden folgender Maßen transformiert

$$x'_\mu = \langle x, e'_\mu \rangle = \langle x, A^\nu_\mu e_\nu \rangle = A^\nu_\mu \langle x, e_\nu \rangle = A^\nu_\mu x_\nu \tag{12}$$

Basistranformation

- eine Basistransformation ist eine lineare Abbildung $A : V \mapsto V$, so dass

$$e'_\mu = Ae_\mu = A^\nu_\mu e_\nu \tag{11}$$

- ein Vektor x ändert sich bei einer Basistransformation nicht, wohl aber seine Koordinaten

$$x = x^\mu e_\mu = x'^\mu e'_\mu$$

- für die Koordinaten eines kovarianten Vektors werden folgender Maßen transformiert

$$x'_\mu = \langle x, e'_\mu \rangle = \langle x, A^\nu_\mu e_\nu \rangle = A^\nu_\mu \langle x, e_\nu \rangle = A^\nu_\mu x_\nu \tag{12}$$

Zusammenfassung Minkowski-Raum

- Definition eines Vektoraums $V = \mathbb{R}^4$
- Definiton des Lorentz-Skalarprodukts I

$$(x, y) = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$$

Zusammenfassung MINKOWSKI-Raum

- Definition eines Vektoraums $V = \mathbb{R}^4$
- Definiton des LORENTZ-Skalarprodukts I

$$(x, y) = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$$

- LORENTZ-Metrik über die Matrix $g_{\mu\nu}$

Zusammenfassung MINKOWSKI-Raum

- Definition eines Vektoraums $V = \mathbb{R}^4$
- Definiton des LORENTZ-Skalarprodukts I

$$(x, y) = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$$

- LORENTZ-Metrik über die Matrix $g_{\mu\nu}$
- Einführung des Dualraumes $\tilde{V}$

Zusammenfassung MINKOWSKI-Raum

- Definition eines Vektoraums $V = \mathbb{R}^4$
- Definiton des LORENTZ-Skalarprodukts I

$$(x, y) = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$$

- LORENTZ-Metrik über die Matrix $g_{\mu\nu}$
- Einführung des Dualraumes $\tilde{V}$
- Definition des LORENTZ-Skalarprodukts II

$$\langle x, y \rangle = x_\mu y^\nu = x^\mu y_\mu = \langle y, x \rangle$$

Zusammenfassung Minkowski-Raum

- Definition eines Vektoraums $V = \mathbb{R}^4$
- Definiton des Lorentz-Skalarprodukts I

$$(x, y) = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$$

- Lorentz-Metrik über die Matrix $g_{\mu\nu}$
- Einführung des Dualraumes $\tilde{V}$
- Definition des Lorentz-Skalarprodukts II

$$\langle x, y \rangle = x_\mu y^\nu = x^\mu y_\mu = \langle y, x \rangle$$

- Definition einer Basistransformation

$$e'_\mu = Ae_\mu = A^\nu_\mu e_\nu$$

Zusammenfassung MINKOWSKI-Raum

- Definition eines Vektoraums $V = \mathbb{R}^4$
- Definiton des LORENTZ-Skalarprodukts I

$$(x, y) = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$$

- LORENTZ-Metrik über die Matrix $g_{\mu\nu}$
- Einführung des Dualraumes $\tilde{V}$
- Definition des LORENTZ-Skalarprodukts II

$$\langle x, y \rangle = x_\mu y^\nu = x^\mu y_\mu = \langle y, x \rangle$$

- Definition einer Basistransformation

$$e'_\mu = A e_\mu = A^\nu_\mu e_\nu$$

Überblick

EINSTEIN's Postulate

Relativitätsprinzip

Alle Naturgesetze sollen invariant bleiben beim Wechsel des Inertialsystems.

- folglich muss die im MINKOWSKI-Raum definierte Metrik invariant sein

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c'^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = s'^2$$

EINSTEIN's Postulate

Relativitätsprinzip

Alle Naturgesetze sollen invariant bleiben beim Wechsel des Inertialsystems.

- folglich muss die im MINKOWSKI-Raum definierte Metrik invariant sein

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c'^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = s'^2$$

EINSTEIN's Postulate

Relativitätsprinzip

Alle Naturgesetze sollen invariant bleiben beim Wechsel des Inertialsystems.

- folglich muss die im MINKOWSKI-Raum definierte Metrik invariant sein

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c'^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = s'^2$$

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Die Vakuumlichtgeschwindigkeit hat in allen Inertialsystemen stets denselben Wert

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

(Wie schon aus der Elektrodynamik bekannt)

EINSTEIN's Postulate

Relativitätsprinzip

Alle Naturgesetze sollen invariant bleiben beim Wechsel des Inertialsystems.

- folglich muss die im MINKOWSKI-Raum definierte Metrik invariant sein

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c'^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = s'^2$$

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Die Vakuumlichtgeschwindigkeit hat in allen Inertialsystemen stets denselben Wert

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

(Wie schon aus der Elektrodynamik bekannt)

Bedingungen der SRT an die Raum-Zeit-Struktur

- der Raum ist isotrop und homogen
- die Zeit ist homogen und folgt dem Kausalitätsprinzip

Bedingungen der SRT an die Raum-Zeit-Struktur

- der Raum ist isotrop und homogen
- die Zeit ist homogen und folgt dem Kausalitätsprinzip

Bedingungen der SRT an die Raum-Zeit-Struktur

- der Raum ist isotrop und homogen
- die Zeit ist homogen und folgt dem Kausalitätsprinzip

Kausalitätsprinzip

Lässt sich von zwei Ereignissen das erste als Ursache des zweiten erklären, so muss das zweite für jeden Beobachter später als das erste stattgefunden haben.

Bedingungen der SRT an die Raum-Zeit-Struktur

- der Raum ist isotrop und homogen
- die Zeit ist homogen und folgt dem Kausalitätsprinzip

Kausalitätsprinzip

Lässt sich von zwei Ereignissen das erste als Ursache des zweiten erklären, so muss das zweite für jeden Beobachter später als das erste stattgefunden haben.

Transformationen

- gesucht sind Transformationen, die das Lorentz-Skalarprodukt invariant lassen
- trivialer Weise tut dies die **Translation** als nicht lineare Abbildung

Transformationen

- gesucht sind Transformationen, die das LORENTZ-Skalarprodukt invariant lassen
- trivialer Weise tut dies die **Translation** als nicht lineare Abbildung
- wir definieren außerdem eine lineare Abbildung die unsere Anforderungen erfüllt

die LORENTZ-**Transformation**

Transformationen

- gesucht sind Transformationen, die das LORENTZ-Skalarprodukt invariant lassen
- trivialer Weise tut dies die **Translation** als nicht lineare Abbildung
- wir definieren außerdem eine lineare Abbildung die unsere Anforderungen erfüllt

die LORENTZ-**Transformation**

- Zusammen bilden beide die POINCARÉ-Gruppe

Transformationen

- gesucht sind Transformationen, die das Lorentz-Skalarprodukt invariant lassen
- trivialer Weise tut dies die **Translation** als nicht lineare Abbildung
- wir definieren außerdem eine lineare Abbildung die unsere Anforderungen erfüllt

die Lorentz-**Transformation**

- Zusammen bilden beide die Poincaré-Gruppe

LORENTZ-Transformation

- die LORENTZ-Transformation ist gegeben durch eine lineare Abbildung $\Lambda : V \longrightarrow V$ mit der Eigenschaft

$$(\Lambda x, \Lambda y) = (x, y) \tag{13}$$

- mit Sätzen aus der Algebra folgt, dass die Λ als Matrizen darstellbar sind

$$\begin{aligned} (e_\mu, \Lambda e_\nu) &= \Lambda^\lambda{}_\nu (e_\mu, e_\lambda) = \Lambda^\lambda{}_\nu g_{\mu\lambda} = \Lambda_{\mu\nu} \\ \langle \varepsilon^\mu, \Lambda e_\nu \rangle &= \Lambda^\lambda{}_\nu \langle \varepsilon^\mu, e_\lambda \rangle = \Lambda^\lambda{}_\nu \delta^\mu_\lambda = \Lambda^\mu{}_\nu \end{aligned} \tag{14}$$

LORENTZ-Transformation

- die LORENTZ-Transformation ist gegeben durch eine lineare Abbildung $\Lambda : V \to V$ mit der Eigenschaft

$$(\Lambda x, \Lambda y) = (x, y) \tag{13}$$

- mit Sätzen aus der Algebra folgt, dass die Λ als Matrizen darstellbar sind

$$\begin{aligned} (e_\mu, \Lambda e_\nu) &= \Lambda^\lambda{}_\nu (e_\mu, e_\lambda) = \Lambda^\lambda{}_\nu g_{\mu\lambda} = \Lambda_{\mu\nu} \\ \langle \varepsilon^\mu, \Lambda e_\nu \rangle &= \Lambda^\lambda{}_\nu \langle \varepsilon^\mu, e_\lambda \rangle = \Lambda^\lambda{}_\nu \delta^\mu_\lambda = \Lambda^\mu{}_\nu \end{aligned} \tag{14}$$

- die Eigenschaft (13) ist äquivalent zu

$$g_{\mu\nu} = \Lambda^\rho_\mu g_{\rho\lambda} \Lambda^\lambda_\nu \qquad \text{oder} \qquad g = \Lambda^\top g \, \Lambda \tag{15}$$

LORENTZ-Transformation

- die LORENTZ-Transformation ist gegeben durch eine lineare Abbildung $\Lambda : V \to V$ mit der Eigenschaft
$$(\Lambda x, \Lambda y) = (x, y) \tag{13}$$
- mit Sätzen aus der Algebra folgt, dass die Λ als Matrizen darstellbar sind
$$\begin{aligned} (e_\mu, \Lambda e_\nu) &= \Lambda^\lambda{}_\nu (e_\mu, e_\lambda) = \Lambda^\lambda{}_\nu g_{\mu\lambda} = \Lambda_{\mu\nu} \\ \langle \varepsilon^\mu, \Lambda e_\nu \rangle &= \Lambda^\lambda{}_\nu \langle \varepsilon^\mu, e_\lambda \rangle = \Lambda^\lambda{}_\nu \delta^\mu_\lambda = \Lambda^\mu{}_\nu \end{aligned} \tag{14}$$
- die Eigenschaft (13) ist äquivalent zu
$$g_{\mu\nu} = \Lambda^\rho_\mu g_{\rho\lambda} \Lambda^\lambda_\nu \qquad \text{oder} \quad g = \Lambda^\top g \, \Lambda \tag{15}$$
- somit 10 unabhängige quadratische Gleichungen für die Komponenten von Λ, z.B.
$$\left(\Lambda^0{}_0\right)^2 - \left(\Lambda^1{}_0\right)^2 - \left(\Lambda^2{}_0\right)^2 - \left(\Lambda^3{}_0\right)^2 = 1 \tag{16}$$

LORENTZ-Transformation

- die LORENTZ-Transformation ist gegeben durch eine lineare Abbildung $\Lambda : V \to V$ mit der Eigenschaft
$$(\Lambda x, \Lambda y) = (x, y) \tag{13}$$
- mit Sätzen aus der Algebra folgt, dass die Λ als Matrizen darstellbar sind
$$\begin{aligned} (e_\mu, \Lambda e_\nu) &= \Lambda^\lambda{}_\nu (e_\mu, e_\lambda) = \Lambda^\lambda{}_\nu g_{\mu\lambda} = \Lambda_{\mu\nu} \\ \langle \varepsilon^\mu, \Lambda e_\nu \rangle &= \Lambda^\lambda{}_\nu \langle \varepsilon^\mu, e_\lambda \rangle = \Lambda^\lambda{}_\nu \delta^\mu_\lambda = \Lambda^\mu{}_\nu \end{aligned} \tag{14}$$
- die Eigenschaft (13) ist äquivalent zu
$$g_{\mu\nu} = \Lambda^\rho_\mu g_{\rho\lambda} \Lambda^\lambda_\nu \qquad \text{oder} \quad g = \Lambda^\top g \, \Lambda \tag{15}$$
- somit 10 unabhängige quadratische Gleichungen für die Komponenten von Λ, z.B.
$$\left(\Lambda^0{}_0\right)^2 - \left(\Lambda^1{}_0\right)^2 - \left(\Lambda^2{}_0\right)^2 - \left(\Lambda^3{}_0\right)^2 = 1 \tag{16}$$

Gruppeneigenschaften

- aus der quadratischen Gleichung für die Komponenten von Λ

$$\left(\Lambda^0{}_0\right)^2 - \left(\Lambda^1{}_0\right)^2 - \left(\Lambda^2{}_0\right)^2 - \left(\Lambda^3{}_0\right)^2 = 1$$

erkennt man sofort, dass

$$\left(\Lambda^0{}_0\right)^2 > 0$$

Gruppeneigenschaften

- aus der quadratischen Gleichung für die Komponenten von Λ

$$\left(\Lambda^0{}_0\right)^2 - \left(\Lambda^1{}_0\right)^2 - \left(\Lambda^2{}_0\right)^2 - \left(\Lambda^3{}_0\right)^2 = 1$$

erkennt man sofort, dass

$$\left(\Lambda^0{}_0\right)^2 > 0$$

- damit folgt für alle Tranformationen

$$\operatorname{sign}\langle \varepsilon^0, \Lambda e_0 \rangle = \pm 1. \tag{17}$$

Gruppeneigenschaften

- aus der quadratischen Gleichung für die Komponenten von Λ

$$\left(\Lambda^0{}_0\right)^2 - \left(\Lambda^1{}_0\right)^2 - \left(\Lambda^2{}_0\right)^2 - \left(\Lambda^3{}_0\right)^2 = 1$$

  erkennt man sofort, dass

$$\left(\Lambda^0{}_0\right)^2 > 0$$

- damit folgt für alle Tranformationen

$$\operatorname{sign}\langle \varepsilon^0, \Lambda e_0 \rangle = \pm 1. \tag{17}$$

- die Komposition zweier LORENTZ-T. bildet wieder eine LORENTZ-T.

Gruppeneigenschaften

- aus der quadratischen Gleichung für die Komponenten von Λ

$$\left(\Lambda^0{}_0\right)^2 - \left(\Lambda^1{}_0\right)^2 - \left(\Lambda^2{}_0\right)^2 - \left(\Lambda^3{}_0\right)^2 = 1$$

  erkennt man sofort, dass

$$\left(\Lambda^0{}_0\right)^2 > 0$$

- damit folgt für alle Tranformationen

$$\operatorname{sign}\langle\varepsilon^0, \Lambda e_0\rangle = \pm 1. \tag{17}$$

- die Komposition zweier LORENTZ-T. bildet wieder eine LORENTZ-T.
- außerdem gilt noch

$$1 = -\det g = -\det \Lambda^\top g \Lambda = -\det \Lambda^\top \det g \det \Lambda = (\det \Lambda)^2 \tag{18}$$

Gruppeneigenschaften

- aus der quadratischen Gleichung für die Komponenten von Λ

$$\left(\Lambda^{0}{}_{0}\right)^2 - \left(\Lambda^{1}{}_{0}\right)^2 - \left(\Lambda^{2}{}_{0}\right)^2 - \left(\Lambda^{3}{}_{0}\right)^2 = 1$$

erkennt man sofort, dass

$$\left(\Lambda^{0}{}_{0}\right)^2 > 0$$

- damit folgt für alle Tranformationen

$$\operatorname{sign}\langle \varepsilon^0, \Lambda e_0 \rangle = \pm 1. \tag{17}$$

- die Komposition zweier LORENTZ-T. bildet wieder eine LORENTZ-T.
- außerdem gilt noch

$$1 = -\det g = -\det \Lambda^\top g \Lambda = -\det \Lambda^\top \det g \det \Lambda = (\det \Lambda)^2 \tag{18}$$

$$\det \Lambda = \pm 1, \qquad \Rightarrow \Lambda \text{ invertierbar.} \tag{19}$$

Gruppeneigenschaften

- aus der quadratischen Gleichung für die Komponenten von Λ

$$\left(\Lambda^0{}_0\right)^2 - \left(\Lambda^1{}_0\right)^2 - \left(\Lambda^2{}_0\right)^2 - \left(\Lambda^3{}_0\right)^2 = 1$$

erkennt man sofort, dass

$$\left(\Lambda^0{}_0\right)^2 > 0$$

- damit folgt für alle Tranformationen

$$\operatorname{sign}\langle \varepsilon^0, \Lambda e_0 \rangle = \pm 1. \tag{17}$$

- die Komposition zweier LORENTZ-T. bildet wieder eine LORENTZ-T.
- außerdem gilt noch

$$1 = -\det g = -\det \Lambda^\top g \Lambda = -\det \Lambda^\top \det g \det \Lambda = (\det \Lambda)^2 \tag{18}$$

$$\det \Lambda = \pm 1, \qquad \Rightarrow \Lambda \text{ invertierbar.} \tag{19}$$

Gruppeneigenschaften

- die Menge der LORENTZ-Transformationen bildet also eine Gruppe $\mathcal{L}$, die vierfach zusammenhängend ist
- die Komponente, die die Einheit enthält, ist gegeben durch $\mathcal{L}_+^\uparrow$

Gruppeneigenschaften

- die Menge der LORENTZ-Transformationen bildet also eine Gruppe $\mathcal{L}$, die vierfach zusammenhängend ist
- die Komponente, die die Einheit enthält, ist gegeben durch $\mathcal{L}_+^\uparrow$

Gruppeneigenschaften

- die Menge der LORENTZ-Transformationen bildet also eine Gruppe $\mathcal{L}$, die vierfach zusammenhängend ist
- die Komponente, die die Einheit enthält, ist gegeben durch $\mathcal{L}_+^\uparrow$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_+^\uparrow &= \left\{ \Lambda \in \mathcal{L},\ \det \Lambda = 1,\ \ \mathrm{sign}\left\langle \varepsilon^0, \Lambda e_0 \right\rangle = 1 \right\} \\
\mathcal{L}_+^\downarrow &= \left\{ \Lambda \in \mathcal{L},\ \det \Lambda = 1,\ \ \mathrm{sign}\left\langle \varepsilon^0, \Lambda e_0 \right\rangle = -1 \right\} \\
\mathcal{L}_-^\uparrow &= \left\{ \Lambda \in \mathcal{L},\ \det \Lambda = -1,\ \ \mathrm{sign}\left\langle \varepsilon^0, \Lambda e_0 \right\rangle = 1 \right\} \\
\mathcal{L}_-^\downarrow &= \left\{ \Lambda \in \mathcal{L},\ \det \Lambda = -1,\ \ \mathrm{sign}\left\langle \varepsilon^0, \Lambda e_0 \right\rangle = -1 \right\} \\
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow . \qquad (20)
\end{aligned}$$

- die LORENTZ-Gruppe $\mathcal{L}$ wird mit $O(3,1)$ bezeichnet bzw. $\mathcal{L}_+^\uparrow$ mit SO

Gruppeneigenschaften

- die Menge der LORENTZ-Transformationen bildet also eine Gruppe $\mathcal{L}$, die vierfach zusammenhängend ist
- die Komponente, die die Einheit enthält, ist gegeben durch $\mathcal{L}_+^\uparrow$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_+^\uparrow &= \left\{ \Lambda \in \mathcal{L},\ \det \Lambda = 1,\ \ \operatorname{sign} \langle \varepsilon^0, \Lambda e_0 \rangle = 1 \right\} \\
\mathcal{L}_+^\downarrow &= \left\{ \Lambda \in \mathcal{L},\ \det \Lambda = 1,\ \ \operatorname{sign} \langle \varepsilon^0, \Lambda e_0 \rangle = -1 \right\} \\
\mathcal{L}_-^\uparrow &= \left\{ \Lambda \in \mathcal{L},\ \det \Lambda = -1,\ \ \operatorname{sign} \langle \varepsilon^0, \Lambda e_0 \rangle = 1 \right\} \\
\mathcal{L}_-^\downarrow &= \left\{ \Lambda \in \mathcal{L},\ \det \Lambda = -1,\ \ \operatorname{sign} \langle \varepsilon^0, \Lambda e_0 \rangle = -1 \right\} \\
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow .
\end{aligned} \tag{20}
$$

- die LORENTZ-Gruppe $\mathcal{L}$ wird mit $O(3,1)$ bezeichnet bzw. $\mathcal{L}_+^\uparrow$ mit $SO(3,1)$

Gruppeneigenschaften

- die Paritätstransformation P (Raumspiegelung, $x^0 \longrightarrow x^0$, $\vec{x} \longrightarrow -\vec{x}$) ist in $\mathcal{L}_-^\uparrow$ enthalten
- die Zeitumkehrtransformation T ($x^0 \longrightarrow -x^0$, $\vec{x} \longrightarrow \vec{x}$) ist in $\mathcal{L}_-^\downarrow$ enthalten

Gruppeneigenschaften

- die Paritätstransformation P (Raumspiegelung, $x^0 \rightarrow x^0$, $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$) ist in $\mathcal{L}_-^\uparrow$ enthalten
- die Zeitumkehrtransformation T ($x^0 \rightarrow -x^0$, $\vec{x} \rightarrow \vec{x}$) ist in $\mathcal{L}_-^\downarrow$ enthalten
- die totale Inversion PT ($x^0 \rightarrow -x^0$, $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$) ist in $\mathcal{L}_+^\downarrow$ enthalten

Gruppeneigenschaften

- die Paritätstransformation P (Raumspiegelung, $x^0 \longrightarrow x^0$, $\vec{x} \longrightarrow -\vec{x}$) ist in $\mathcal{L}_-^\uparrow$ enthalten
- die Zeitumkehrtransformation T ($x^0 \longrightarrow -x^0$, $\vec{x} \longrightarrow \vec{x}$) ist in $\mathcal{L}_-^\downarrow$ enthalten
- die totale Inversion PT ($x^0 \longrightarrow -x^0$, $\vec{x} \longrightarrow -\vec{x}$) ist in $\mathcal{L}_+^\downarrow$ enthalten

Teilräume

- zur Vereinfachung kann man den Minkowski-Raum wieder in Teilräume zerlegen
- Zerlegung in raumartigen und zeitartigen Anteil

$$x \in V \implies x = (x^0, \vec{x}) \quad \text{mit} \quad x^0 \in \mathbb{R}\,,\ \vec{x} \in \mathbb{R}^3$$

Teilräume

- zur Vereinfachung kann man den Minkowski-Raum wieder in Teilräume zerlegen
- Zerlegung in raumartigen und zeitartigen Anteil

$$x \in V \implies x = (x^0, \vec{x}) \quad \text{mit} \quad x^0 \in \mathbb{R}\ ,\ \vec{x} \in \mathbb{R}^3$$

- die Lorentz-Transformation $\Lambda : V \mapsto V$ bekommt folgende Blockstruktur

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \vec{a}^\top \\ \vec{b} & A \end{pmatrix} \qquad \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & -\vec{b}^\top \\ -\vec{a} & A^\top \end{pmatrix} \tag{21}$$

Teilräume

- zur Vereinfachung kann man den MINKOWSKI-Raum wieder in Teilräume zerlegen
- Zerlegung in raumartigen und zeitartigen Anteil

$$x \in V \implies x = (x^0, \vec{x}) \quad \text{mit} \quad x^0 \in \mathbb{R}\ ,\ \vec{x} \in \mathbb{R}^3$$

- die LORENTZ-Transformation $\Lambda : V \mapsto V$ bekommt folgende Blockstruktur

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \vec{a}^\top \\ \vec{b} & A \end{pmatrix} \qquad \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & -\vec{b}^\top \\ -\vec{a} & A^\top \end{pmatrix} \tag{21}$$

Überblick

Drehung

- Drehungen sind orthogonale Abbildungen $R_\phi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$
- in Blockmatrixschreibweise ist

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^\top \\ \vec{0} & R_\varphi \end{pmatrix} \tag{22}$$

und wirkt deshalb nur auf die räumlichen Komponenten des Vierervektors

Drehung

- Drehungen sind orthogonale Abbildungen $R_\phi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$
- in Blockmatrixschreibweise ist

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^\top \\ \vec{0} & R_\varphi \end{pmatrix} \tag{22}$$

  und wirkt deshalb nur auf die räumlichen Komponenten des Vierervektors
- die Drehung ist durch $\vec{\varphi} \in \mathbb{R}^3$ mit $\hat{\varphi} = \vec{\varphi}/|\vec{\varphi}|$ Drehachse und $\varphi = |\vec{\varphi}|, \varphi \in [0, \pi)$ Drehwinkel parametrisiert (EULER-Parametrisierung, Rechte-Hand-Regel)

Drehung

- Drehungen sind orthogonale Abbildungen $R_\phi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$
- in Blockmatrixschreibweise ist

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^\top \\ \vec{0} & R_\varphi \end{pmatrix} \tag{22}$$

  und wirkt deshalb nur auf die räumlichen Komponenten des Vierervektors
- die Drehung ist durch $\vec{\varphi} \in \mathbb{R}^3$ mit $\hat{\varphi} = \vec{\varphi}/|\vec{\varphi}|$ Drehachse und $\varphi = |\vec{\varphi}|, \varphi \in [0, \pi)$ Drehwinkel parametrisiert (EULER-Parametrisierung, Rechte-Hand-Regel)

Drehung

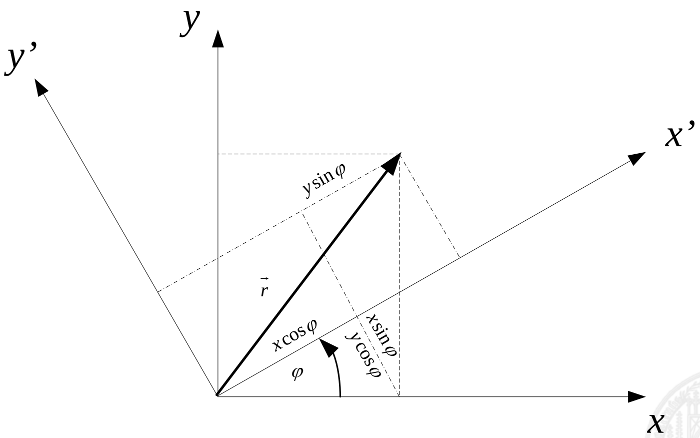


Abbildung: Drehung für $\hat{\varphi} = e_3$

Drehung

Für eine *aktive* Transformation (auf den Vektor bezogen) mit $\hat{\varphi} = e_3$ ergibt sich folgende Drehmatrix

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

LORENTZ-Boost

- betrachten jetzt eine Geschwindigkeitstransformation mit dem *Geschwindigkeitsvektor* $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $|\vec{v}| \leq 1$
- damit die Transformation norminvariant bleibt, definieren wir

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - \vec{v} \cdot \vec{v}}$$

LORENTZ-Boost

- betrachten jetzt eine Geschwindigkeitstransformation mit dem *Geschwindigkeitsvektor* $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $|\vec{v}| \leq 1$
- damit die Transformation norminvariant bleibt, definieren wir

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - \vec{v} \cdot \vec{v}}$$

- daraus folgt der so genannte LORENTZ-*Boost*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \vec{v}^{\top} \\ \gamma \vec{v} & 1_3 + \frac{\gamma - 1}{v^2} \vec{v} \vec{v}^{\top} \end{pmatrix} \tag{24}$$

LORENTZ-Boost

- betrachten jetzt eine Geschwindigkeitstransformation mit dem *Geschwindigkeitsvektor* $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $|\vec{v}| \leq 1$
- damit die Transformation norminvariant bleibt, definieren wir

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - \vec{v} \cdot \vec{v}}$$

- daraus folgt der so genannte LORENTZ-*Boost*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \vec{v}^\top \\ \gamma \vec{v} & 1_3 + \frac{\gamma - 1}{v^2} \vec{v} \vec{v}^\top \end{pmatrix} \tag{24}$$

LORENTZ-Boost

- Definition der Rapidität $\omega \in [0, \infty)$

$$\vec{v} = \tanh(\omega)\,\hat{v} \qquad \hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \tag{25}$$

- damit vereinfacht sich der LORENTZ-*Boost* zu

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\omega & -\sinh\omega \\ -\sinh\omega & \cosh\omega \end{pmatrix} \tag{26}$$

Lorentz-Boost

- Definition der Rapidität $\omega \in [0, \infty)$

$$\vec{v} = \tanh(\omega)\, \hat{v} \qquad \hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \tag{25}$$

- damit vereinfacht sich der Lorentz-*Boost* zu

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\omega & -\sinh\omega \\ -\sinh\omega & \cosh\omega \end{pmatrix} \tag{26}$$

- es ist somit trivial zu zeigen, dass auch diese Transformation Lorentz-invariant ist

LORENTZ-Boost

- Definition der Rapidität $\omega \in [0, \infty)$

$$\vec{v} = \tanh(\omega)\, \hat{v} \qquad \hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \tag{25}$$

- damit vereinfacht sich der LORENTZ-*Boost* zu

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\omega & -\sinh\omega \\ -\sinh\omega & \cosh\omega \end{pmatrix} \tag{26}$$

- es ist somit trivial zu zeigen, dass auch diese Transformation LORENTZ-invariant ist
- alle *Boosts* in eine Richtung bilden eine Untergruppe von $\mathcal{L}$

Lorentz-Boost

- Definition der Rapidität $\omega \in [0, \infty)$

$$\vec{v} = \tanh(\omega)\,\hat{v} \qquad \hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \tag{25}$$

- damit vereinfacht sich der Lorentz-*Boost* zu

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\omega & -\sinh\omega \\ -\sinh\omega & \cosh\omega \end{pmatrix} \tag{26}$$

- es ist somit trivial zu zeigen, dass auch diese Transformation Lorentz-invariant ist
- alle *Boosts* in eine Richtung bilden eine Untergruppe von $\mathcal{L}$
- man kann zwei beliebige *Boosts* durch einen Boost mit einer Drehung (Thomas-Rotation)ersetzen

LORENTZ-Boost

- Definition der Rapidität $\omega \in [0, \infty)$

$$\vec{v} = \tanh(\omega)\,\hat{v} \qquad \hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \tag{25}$$

- damit vereinfacht sich der LORENTZ-*Boost* zu

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\omega & -\sinh\omega \\ -\sinh\omega & \cosh\omega \end{pmatrix} \tag{26}$$

- es ist somit trivial zu zeigen, dass auch diese Transformation LORENTZ-invariant ist
- alle *Boosts* in eine Richtung bilden eine Untergruppe von $\mathcal{L}$
- man kann zwei beliebige *Boosts* durch einen Boost mit einer Drehung (THOMAS-Rotation)ersetzen

Überblick

Ausblick

- bisher nur Wirkung der LORENTZ-Transformation auf Elementen des MINKOWSKI-Raums $\mathbb{M}$ betrachtet
- ähnlich wie man in der Quantenmechanik die Wirkung der LORENTZ-Transformation auf die quantenmechanischen Zustände untersuchen

Ausblick

- bisher nur Wirkung der LORENTZ-Transformation auf Elementen des MINKOWSKI-Raums $\mathbb{M}$ betrachtet
- ähnlich wie man in der Quantenmechanik die Wirkung der LORENTZ-Transformation auf die quantenmechanischen Zustände untersuchen
- deshalb ist es nützlich die LORENTZ-Transformationen als abstrakte Gruppe aufzufassen

Ausblick

- bisher nur Wirkung der LORENTZ-Transformation auf Elementen des MINKOWSKI-Raums $\mathbb{M}$ betrachtet
- ähnlich wie man in der Quantenmechanik die Wirkung der LORENTZ-Transformation auf die quantenmechanischen Zustände untersuchen
- deshalb ist es nützlich die LORENTZ-Transformationen als abstrakte Gruppe aufzufassen
- so können die Darstellungen dieser Gruppe in den verschiedenen Räumen zu behandelt werden

Ausblick

- bisher nur Wirkung der LORENTZ-Transformation auf Elementen des MINKOWSKI-Raums $\mathbb{M}$ betrachtet
- ähnlich wie man in der Quantenmechanik die Wirkung der LORENTZ-Transformation auf die quantenmechanischen Zustände untersuchen
- deshalb ist es nützlich die LORENTZ-Transformationen als abstrakte Gruppe aufzufassen
- so können die Darstellungen dieser Gruppe in den verschiedenen Räumen zu behandelt werden

Quellen

- Eckhard Rebhan
  „Theoretische Physik I“
- Michael Beyer
  „Quantenelektrodynamik“
- Ulrich E. Schröder
  „Spezielle Relativitätstheorie“
- Peter Dombrowski
  „Wege in die euklidischen Ebenen“

Vielen Dank für ihre Aufmerksamkeit!