Aufgabe 3

gegeben:

$$\Psi_x = u$$
$$\Psi_y = -w$$

Integration liefert die Stromfunktion:

$$\Psi = ux + C_1(y)$$
$$\Psi = -wy + C_2(x)$$
$$\Rightarrow \Psi = ux - wy$$

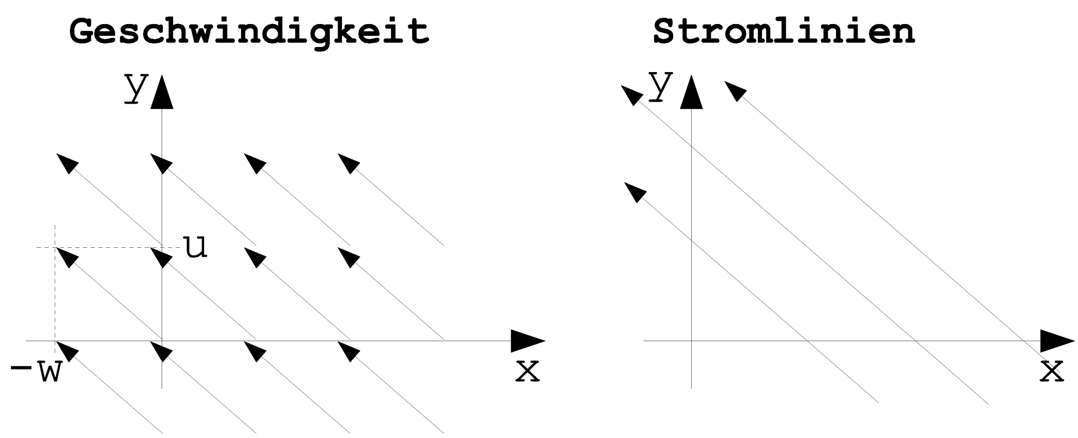


Abbildung 1: Geschwindigkeitsfeld und Stromlinien

Aufgabe 4

Stromfunktion aus Lösen der Wellendifferentialgleichung (Vorlesung):

$$\Phi(x,z,t) = \eta_0 \frac{\omega}{k} \frac{\cosh(k(z+H))}{\sinh(kH)} \cos(kx - \omega t)$$

für Tiefwasserwellen gilt:

$$kH \sim \frac{H}{\lambda} \gg 1$$

damit kann man nähern:

$$\begin{aligned}
\frac{\cosh(k(z+H))}{\sinh(k(z+H))} &= \frac{e^{kz+kH} + e^{-kz-kH}}{e^{kH} + \underbrace{e^{-kH}}_{\approx 0}} \\
&\approx e^{kz} + \underbrace{e^{-kz-2kH}}_{\approx 0} \\
&\approx e^{kz} \\
\Rightarrow \Phi(x,z,t) &= \eta_0 \frac{\omega}{k} e^{kz} \cos(kx - \omega t)
\end{aligned}$$

Geschwindigkeiten:

$$\begin{aligned}
u = \Phi_x &= -\eta_0 \omega e^{kz} \sin(kx - \omega t) \\
w = \Phi_z &= \eta_0 \omega e^{kz} \cos(kx - \omega t)
\end{aligned}$$

Die Trajektorien ergeben sich durch Integration:

$$\begin{aligned}
x - x_0 &= \int \mathrm{d}t u = \eta_0 e^{kz} \cos(kx - \omega t) \\
z - z_0 &= \int \mathrm{d}t w = -\eta_0 e^{kz} \sin(kx - \omega t)
\end{aligned}$$

Es ergibt sich, dass bei Tiefwasserwellen ein Teilchen eine Kreisbahn beschreibt. Der Radius dieser Kreise ist durch die Grundauslenkung η_0 vorgegeben und nimmt mit der Tiefe exponentiell ab (damit ist die Randbedingung für $z = -H$ näherungsweise erfüllt). Einige Stromlinien sind in Abb. 2 dargestellt.

Die Geschwindigkeitskomponenten u und w unterliegen einer sinusförmigen Änderung in Raum und Zeit, wobei die Maximalgeschwindigkeit ebenfalls mit der Tiefe abnimmt. In Abb. 3 ist dies für die Horizontalkomponente dargestellt, für die Vertikalkomponente ist diese genauso, es tritt lediglich eine Phasenverschiebung auf.

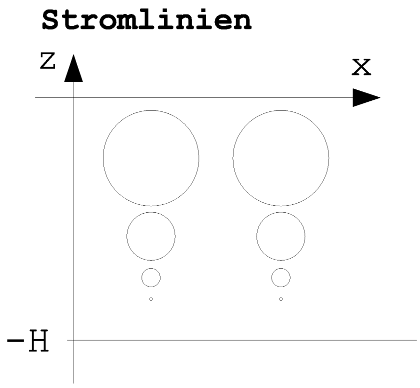
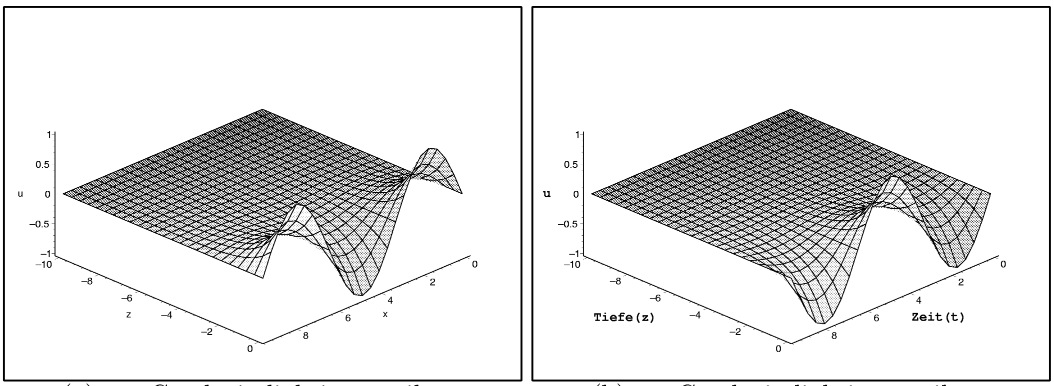


Abbildung 2: Stromlinien



(a) z-x-Geschwindigkeitsverteilung (b) z-t-Geschwindigkeitsverteilung

Abbildung 3: Veränderung der Horizontalgeschwindigkeit u in Raum und Zeit