Eichinvarianz in der Quantenmechanik

abgeleitet aus der Maxwell-Theorie

Seminarvortrag Quantenelektrodynamik

1. Teil: Schrödingergleichung

Eichtheorien sind ein inhaltsreicher Gedankenkomplex
und eine große Errungenschaft menschlicher Kultur.
-Taschiro Kugo

Motivation:

Heutige Theorien zur Beschreibung der Wechselwirkungen zwischen Teilchen im Standardmodell der Elementarteilchen, sind alle Eichtheorien. Der Name bezieht sich auf die spezielle Eigenschaft der Eichsymmetrie, als scheinbar fundamentale Eigenschaft der Physik.

(Auszug aus der Pressemitteilung zur Verleihung des Nobelpreises in der Physik 1999)

Als berühmteste Vorhersage der Eichtheorien gild das W-Boson, welches 1985 experimentell nachgewiesen werden konnte.

Wiederholung:

klassische Mechanik: L = T – U („Lagrangefunktion“)

- unter Anwendung des Noethertheorems folgt, das es zu jeder Symmetrie der Lagrangefunktion eine Erhaltungsgröße existiert.

Feldtheorie: $\mathcal{L}$ („Lagrangedichte“)

- $\mathcal{L}$ ist eine Funktion der Felder $\phi_j(x)$ und deren Gradienten
- analog zum klassischen Fall gilt auch für die Lagrangedichten das Noethertheorem
- bei Multiplikation des Feldes mit einer Phase ($e^{-i\alpha}$) folgt bei Invarianz der Lagrangedichte unter der Transformation die Erhaltungsgröße:

$$i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\Phi-\Phi^*\partial\frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\right)=\text{const.}$$

- über die Euler-Lagrange-Gleichungen folgen wieder die Bewegungsgleichung der Punktmechanik

  Beispiele verschiedener Lagrangedichten/Funktionen:

  - Klein-Gordon (Spin 0, skalares Feld) : $\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi^*-\frac{1}{2}\mathrm{m}^2\Phi^2$
  - Dirac-Lagrange-Funktion (Spin ½ Spinorfeld) : $\mathcal{L}=\mathrm{i}\overline{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi-\mathrm{m}\overline{\Psi}\Psi$
  - Proca (Spin 1, Vektorfeld) : $\mathcal{L}=\frac{1}{4}\mathrm{F}^{\mu\nu}\mathrm{F}_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\mathrm{m}^2\mathrm{A}^\mu\mathrm{A}_\mu$
  - Maxwell (masseloses Vektorfeld) : $\mathcal{L}=\frac{1}{4}\mathrm{F}^{\mu\nu}\mathrm{F}_{\mu\nu}$

Quantenmechanik:

Beschreibung freier, nichtrelativistischer Teilchen durch Schrödinger-Gleichung

$$\frac{1}{2m}(-i\nabla)^2 \Psi(\underline{x},t) = i\frac{\partial \Psi(\underline{x},t)}{\partial t} \quad (1)$$

- bzw. für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld

$$[\frac{1}{2m}(-i\nabla - \mathrm{q}\mathrm{A})^2 + q\Phi]\Psi(\underline{x},t) = i\frac{\partial \Psi(\underline{x},t)}{\partial t} \quad (2)$$

- es folgte die Eichinvarianz unter der zusammengesetzten Transformation

$$\boxed{\begin{array}{c} A \rightarrow A' = A + \nabla\chi \\ \Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \dfrac{\partial\chi}{\partial t} \\ \Psi \rightarrow \Psi' = e^{iq\chi}\Psi \end{array}} \quad (3)$$

Allgemein:

- es besteht ein enger Zusammenhang zwischen Ladungserhaltung und Eichinvarianz (Elementarteilchenphysik)
- Elektrostatik: Physik ist unabhängig von den Absolutwerten der Potentiale

<u>Eichprinzip:</u>

Forderung nach der Invarianz des Systems unter lokaler (und somit auch globaler) Eichtransformation.

Aus der Elektrostatik ist bekannt das so ein neues B-Feld existieren muss, welches genau die durch die Maxwell-Gleichung beschriebene Eigenschaften hat. - Symmetrieeigenschaften des Systems legen die Dynamik fest.

<u>Eichinvarianz der Schrödinger-Gleichung (1):</u>

Es wird gefordert, dass die Theorie invariant unter Phasentransformation ist.

1.) globale Phasentransformation:

$$\Psi(\underline{x},t) \rightarrow \Psi'(\underline{x},t) = e^{i\alpha}\Psi(\underline{x},t) \qquad - \ \alpha = \text{const.}$$

Gleichung (1) liefert dann für Ψ' : (mit $H = \frac{1}{2\mathrm{m}}(-i\nabla)^2$)

$$e^{i\alpha} H\Psi = e^{i\alpha}\frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad (1^*)$$

Gleichung (1*) ist äquivalent zu (1)!

2.) lokale Phasentransfromation:

Es wird sich zeigen, dass unter einer lokalen Phasentransformation i.a. keine Invarianz der freien Schrödinger-Gleichung (1) folgt.

$$\boxed{\begin{aligned}&\alpha=\alpha(\underline{x},t) \text{ und } \Psi'(\underline{x},t)=e^{i\alpha(x,t)}\Psi(\underline{x},t)\\ &\rightarrow H\Psi'(\underline{x},t)=(-i\nabla)^2\Psi'(\underline{x},t)\neq i\frac{\partial\Psi'}{\partial t}\end{aligned}} \quad (4)$$

Es wird daher eine Wechselwirkungstheorie gefordert, welche die Invarianz erhält. Dies erreicht man durch einführen eines 4er Vektrofeldes, welches die Wechselwirkung mit einen geladenen Partikel vorschreibt und den Transformationen (3) genügt.

So formuliert sich die Grundlage des Eichprinzips, das unter diesem Typ von Vektorfeld die Wechselwirkung der Teilchen beschreibt. Es folgt aus Gleichung (2):

$$i e^{-i\alpha}\left(-i\frac{\partial\alpha}{\partial t}\Psi'+\frac{\partial\Psi'}{\partial t}\right)=\frac{1}{2\mathrm{m}}(-i\nabla-qA'+q\nabla\chi)(-i\nabla-qA'+q\nabla\chi)e^{-i\alpha}\Psi'+q(\Phi'+\frac{\partial\chi}{\partial t})e^{-i\alpha}\Psi'$$
$$=\frac{1}{2\mathrm{m}}(-i\nabla-qA'+q\nabla\chi)e^{-i\alpha}(-i\nabla-qA'+q\nabla\chi-\nabla\alpha)\Psi'+q(\Phi'+\frac{\partial\chi}{\partial t})e^{-i\alpha}\Psi'$$
$$=\frac{1}{2\mathrm{m}}e^{-i\alpha}(-i\nabla-qA'+q\nabla\chi-\nabla\alpha)^2\Psi'+q(\Phi'+\frac{\partial\chi}{\partial t})e^{-i\alpha}\Psi' \quad (4^*)$$

durch geeignete Wahl : $\alpha(\underline{x},t)=q\chi(\underline{x},t)$
geht (4*) über in die Form von (2):

$$i\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial t}\right)=\left[\frac{1}{2\mathrm{m}}(-i\nabla-qA')^2+q\Phi'\right]\Psi'$$

Hieraus folgt nun die gewünschte invariante Form unter der obigen Eichtransformation

Anwendung:

Hat man einen Raum ohne Magnetfeld ($\underline{B}$ = 0), dann gibt es zwei Möglichkeiten zur Beschreibung der Bewegung eines Elektrons in einem elektrischen Potential Φ.

1. Lösen der Schrödinger-Gleichung: $i\frac{\partial\Psi}{\partial t}=(\frac{-1}{2\mathrm{m}_e}\nabla^2+e\Phi)\Psi$

   in welcher das Vektorpotential überhaupt nicht vorkommt.
2. Beachten der Eichfreiheit: $\underline{A}'=\nabla\chi$

   woraus folgt: $\Psi'(\underline{x},t)=e^{ie\chi(x,t)}\Psi(\underline{x},t)$

Hieraus ergibt sich die klassische Annahme, das der Phasenfaktor in der Wellenfunktion keine physikalische Konsequenz hat, da ja nur das Betragsquadrat experimentell zugänglich ist. Allerdings gibt es Situationen in denen die Wellenfunktion selbst, das heisst ihre Phase durchaus eine Rolle spielt.

Zwei Effekte:

- Quantisierung des magnetischen Flusses
- Bohm – Aharanov – Effekt (Seminarvortrag: Robert Löffler)

Kurze Skizze der Quantisierung des magnetischen Flusses:

Man betrachte einen Supraleiter-Ring in dem ein Strom fließt. Unterhalb der kritischen Temperatur wird das Magnetfeld aus dem Ring gedrückt und die Elektronen bewegen sich in einem Raum ohne Magnetfeld. (Meißner-Effekt)

Der Phasenfaktor eines Elektrons im Ringtorus kann ausgedrückt werden durch:

$$\chi(\underline{x},t)=\int d\,\underline{x}'\,\underline{A}(\underline{x}',t)$$

Wobei das Integral beginnend von einem beliebigen Startpunkt innerhalb des Torus mit $\underline{A} = \underline{A}'$ das Vektorpotential des MF ausserhalb des Torus bezeichnet. Es ist jedoch nicht eindeutig aufgrund des durch das Loch im Torus hindurchtrettenden MF. Es hängt somit vom gewählten Integrationsweg ab.

Betrachtet man die Differenz zweier Wegintegrale die sich um eine Windung längs des Torus unterscheiden, so ergibt sich:

$$\int(1)-\int(2)=\oint d\,\underline{x}'\,\underline{A}(\underline{x},t)=\int d\,\underline{F}\,\nabla'\times\underline{A}(\underline{x}',t)=\int d\,\underline{F}\,\underline{B}(\underline{x}',t)=\Phi_m$$

Dies ist also gerade der magnetische Fluss der durch die Fläche die vom Loch des Toruses aufgespannt wird, hindurchtritt. Aus physikalischen Gründen müssen wir fordern, dass die Wellenfunktion selbst eindeutig ist, also den Unterschied in den Wegen 1 und 2 nicht spürt. Dies bedeutet, dass der magnetische Fluss gequantelt ist.

$$\Phi_m=2\frac{\pi}{e}\cdot n\,,\ n=0,\pm1,\ldots$$

Im Experiment wird dies bestätigt: Allerdings mit dem Faktor ½ durch die Coopersche Theorie, nach der jeweils zwei Elektronen im Supraleiter Cooper-Paare bilden.

Anhang Seminarvortrag Quantenelektrodynamik

2. Teil: Dirac-Gleichung

1.) „globale Eichinvarianz“:

Analog zur Schrödingergleichung ergibt sich auch hier durch die Form der Gleichung, das der konstante Phasenfaktor in der Wellenfunktion sich über das komplex konjungierte gerade rauskürzt, die Gleichung also invariant unter Phasentransformation ist.

2.) „lokale Eichinvarianz“:

Der Phasenfaktor ist nun ortsabhängig, das bedeutet bei der Ableitung ergibt sich in der Lagrange-Funktion (Dichte) ein zusätzlicher Term.

$$\mathcal{L}\rightarrow\mathcal{L}+(\mathrm{q}\,\overline{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi)\partial_{\mu}\lambda$$

$$\text{mit }\lambda(\mathrm{x})=\frac{-1}{\mathrm{q}}\theta(\mathrm{x})\,;\quad \theta\text{ - Phasenfaktor}$$

Unter der Eichtransformation : $\Psi\rightarrow e^{-i\mathrm{q}\lambda(\mathrm{x})}\psi$ ist diese Form i.a. nicht eichinvariant. Genauer bedeutet das, es fehlt in der Gleichung ein Term der die auftrettende Ableitung nach λ(x) kompensiert.

Durch Verwendung des elektromagnetischen Potentiales (4er Vektor) das sich bekannter Weise transformiert, $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$ kann eine neue eichinvariante Lagrange-Funktion gewonnen werden.

Ohne näher darauf eingehen zu wollen, kann man durch Vergleich mit der Lagrange-Funktion nach Proca, folgern, das es sich hierbei um ein masseloses Vektorfeld handelt, ebend dem elektromagnetischen Potential. Somit beschreibt die Dirac-Gleichung Positronen und Elektronen!

Um den Gedankengang zu vervollständigen betrachten wir die Ableitung der Wellenfunktion unter Eichtransformation. $\partial_\mu \Psi \rightarrow e^{-iq\lambda}[\partial_\mu - i\,q(\partial_\mu \lambda)]\Psi$

Der Phasenfaktor wird also ersetzt durch die Ableitung von λ(x) als zusätzlichen Term in der freien Dirac-Gleichung.

Die Gleichung wird „forminvariant“ durch Einführung der „kovarianten Ableitung“.

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + i\,q\,A_\mu$$

Hieraus ergibt sich unter Eichtransformation: $D_\mu \Psi \rightarrow e^{-iq\lambda} D_\mu \Psi$

Das heisst genauer, unter Eichtransformation transformieren sich die Felder:

$$\Psi \rightarrow e^{-iq\lambda}\Psi = \Psi'$$
$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda = A'_\mu$$

damit folgt die Dirac-Gleichung in der Form:

$$\begin{aligned}
&(\gamma^\mu[i(\partial_\mu - q\,A'_\mu)] - m)\Psi' = (\gamma^\mu[i(\partial_\mu - q\,A_\mu - q\,\partial_\mu \lambda)] - m)e^{-iq\lambda}\Psi \\
&= (\gamma^\mu[i(\partial_\mu e^{-iq\lambda})\Psi + i(\partial_\mu \Psi)e^{-iq\lambda} - q\,A_\mu \Psi e^{-iq\lambda} - q(\partial_\mu \lambda)\Psi e^{-iq\lambda}] - m\Psi e^{-iq\lambda})e^{-iq\lambda}\Psi \\
&= i\gamma^\mu(\partial_\mu - q\,A_\mu)\Psi e^{-iq\lambda} - m\Psi e^{-iq\lambda} \\
&= i\gamma^\mu(D_\mu \Psi' - m\Psi')
\end{aligned}$$

<u>Literatur:</u>

zu Teil 1:

Wachter, Hoeber : „Repetitorium Theoretische Physik“ (Springer Verlag)

S.Schreiber: Seminarvortrag „Symmetrien in der Quantenphysik – Eichinvarianz“ SS 2004

zu Teil 2:

D. Griffiths: „Elementarteilchenphysik“ (Akademie Verlag)